日本機械学会論文集(A 編)
71 巻 708 号(2005-8)

論文 No. 04-0758

短繊維強化プラスチックスにおける繊維端部の一般化応力拡大係数の解析*

野田尚昭*1, 高瀬 康*1, 飯塚隆宏*2

Generalized Stress Intensity Factors at the Fiber End in Fiber Reinforced Plastics

Nao-Aki NODA*3, Yasushi TAKASE and Takahiro IIZUKA

*3 Department of Mechanical Engineering, Kyushu Institute of Technology, 1-1 Sensui-cho, Tobata-ku, Kitakyushu-shi, Fukuoka, 804-8550 Japan

To evaluate the mechanical strength of fiber reinforced composites, it is necessary to consider singular stresses at the end of fibers because they cause crack initiation, propagation, and final failure. The singular stress field is controlled by geseralized stress intensity factor (GSIF) defined at the fiber end. In this study, periodic and zigzag arrays of cylindrical inclusions under longitudinal tension are analyzed by the application of the bady force method. The unit cell region is approximated as an axisymmetric cell ; then, the problems are solved on the superposition of two auxiliary problems under different boundary conditions. The GSIFs are systematically calculated with varying the elastic modulus ratio and spacing of fibers. The effects of volume fraction and spacing of fibers are discussed in short fiber reinforced plastics.

Key Words : Elasticity, Composite Material, Fracture Mechanics, Body Force Method, Generalized Stress Intensity Factor, Hexagonal Array, Zigzag Array, Cylindrical Inclusion, Reinforced Plastics

1. 緒言

炭素繊維の普及および高強度，耐熱性の熱可塑性樹脂の急速な開発に伴って，最近では，その生産性の高さから射出成形した短炭素繊維強化熱可塑性プラスチックが機械・構造物によく用いられるようになった．しかし，その繊維端部に発生した疲労き裂が伝ぱし破断に至る(1)(2)ため，その強度を力学的に解明するには強化材と母材界面の応力分布や応力特異性の強さの把握が必要となる．実際の繊維は3次元形状を有するので，強化繊維の3次元モデルとして取り扱う必要がある．この観点から母材中に存在する円柱状介在物の問題(3)-(11)は重要な応力集中問題の一つである．

いま，強化繊維を円柱状とみなし，その繊維の配列として，図1に示すように(a)周期配列および(b)千鳥配列モデルを考えると，それらのひとつのセルはいずれも図1(c),(d)に示すような軸対称セルで近似可能である．このとき，強化繊維端部Aのごく近傍では平面ひずみ状態となるので，その特異応力場は母材に生じる$\sigma_{\theta,M}$を例にとれば式(1)で表される(12)．

$$\sigma_{\theta,M}=\frac{K_{I,\lambda_1}}{r^{1-\lambda_1}}f^{I}_{\theta,M}(\theta)+\frac{K_{II,\lambda_2}}{r^{1-\lambda_2}}f^{II}_{\theta,M}(\theta)$$

母材 $-3\pi/4\le\theta\le3\pi/4$ では，

$$f^{I}_{\theta,1}(\theta)=\frac{\lambda_1}{\sqrt{2\pi}(\alpha-\beta)}\langle\,[-\lambda_1(\alpha-\beta)\cos(\lambda_1\pi/2)+(1-\beta)\sin(\lambda_1\pi)\,]\times\cos\{(\lambda_1+1)\theta\}+[(\lambda_1+1)(\alpha-\beta)\sin(\lambda_1\pi/2)]\times\cos\{(\lambda_1-1)\theta\}\,\rangle$$

$$f^{II}_{\theta,1}(\theta)=\frac{\lambda_2}{\sqrt{2\pi}(\alpha-\beta)}\langle\,[-\lambda_2(\alpha-\beta)\cos(\lambda_2\pi/2)-(1-\beta)\sin(\lambda_2\pi)\,]\times\sin\{(\lambda_2+1)\theta\}+[(\lambda_2+1)(\alpha-\beta)\sin(\lambda_2\pi/2)]\times\sin\{(\lambda_2-1)\theta\}\,\rangle$$

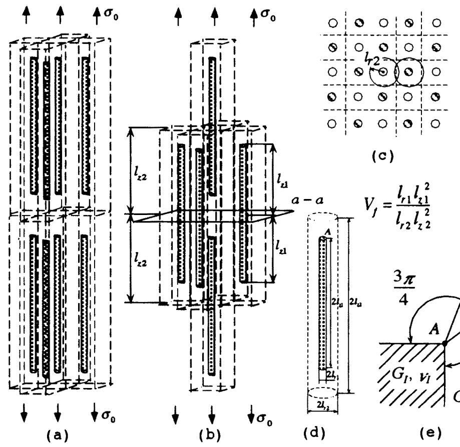


Fig.1 Unit cell model for 3D arrays of inclusions
(a) Periodic array (b) Zigzag array (c) Cross section a-a
(d) Axisymmetric unit cell model (e) Local polar coordinate around corner A (Plane strain condition can be assumed.)

* 原稿受付 2004年7月1日.
*1 正員，九州工業大学工学部(〒804-8550 北九州市戸畑区仙水町1-1).
*2 九州工業大学工学部.
E-mail : noda@mech.kyutech.ac.jp

$$\alpha=\frac{G_I(\kappa_M+1)-G_M(\kappa_I+1)}{G_I(\kappa_M+1)+G_M(\kappa_I+1)}\ ,\quad \beta=\frac{G_I(\kappa_M-1)-G_M(\kappa_I-1)}{G_I(\kappa_M+1)+G_M(\kappa_I+1)}$$

$$\kappa_M=3-4\nu_M,\kappa_I=3-4\nu_I \qquad \cdot\cdot\cdot\cdot(1)$$

式(1)で，λ_1, λ_2は，幾何条件と材料条件より得られる特性方程式の根[13]であり，(r,θ)は図１(e)に示す端部Aに関する極座標，角度θは角部Aの２等分線から測った角度である（図２～図４の円柱座標(r,θ,z)と異なる)．また，(G_M,ν_M)と(G_I,ν_I)は母材と介在物の弾性定数（横弾性係数とポアソン比）である．

今までに円柱状介在物を有する無限体の軸方向引張り問題は剛体介在物について笠野ら[3]，端部を丸めた円柱状介在物について長谷川ら[4]により解析が行われている．またeigenひずみによる円柱状介在物の応力，変位場がTakaoら[5]Hasegawaら[6]Wuら[7][8]によって考察されている．著者らはさきに円柱状介在物が母材中に単独に存在する場合の端部の一般化応力拡大係数を剛性比と繊維のアスペクト比を変化させて正確に求めた[9][10]．しかし，実際の繊維強化複合材料では強化繊維が母材中に多数個配列しているため，その影響を知る必要がある．そこで，本研究では強化繊維の３次元配列モデル（図１(a),(b),(c)）を図１(d)に示すようなユニットセル中に１個の円柱状介在物が存在するモデルとして取扱い，介在物端部の特異応力場の強さを解析する．そして，繊維の体積含有率やユニットセルの寸法が繊維端部の一般化応力拡大係数へ及ぼす影響を，繊維が単独に存在する場合と比較して考察する．

2．補助問題の重ね合わせによる千鳥配列をなす強化繊維の解析法

著者らは，さきに図１(a)の周期配列をなす介在物の問題を体積力法の特異積分方程式で表現し，その一般化応力拡大係数を繊維の長さ，間隔，剛性比を変化させて考察した[11]．そこで，本論文では，３次元千鳥配列をなす強化繊維(図１(b))の解析法を，前論文と異なる点を中心に説明する．以下で(l_{r1},l_{z1})は介在物の寸法，(l_{r2},l_{z2})はユニットセルの寸法である．

2.1　千鳥配列の境界条件

まず図１(b)のような千鳥配列の問題を図１(d)のユニットセルで表現する場合の境界条件は以下のように表される．以下で，u_{z0}は$z=l_{z2}$におけるz方向の一定の変位，u_{r0}は式(3)で定義される$r=l_{r2}$におけるr方向変位の平均値である．

(1) $z=l_{z2}$で　$\tau_{rz}\big|_{z=l_{z2}}=0,\quad u_z\big|_{z=l_{z2}}=u_{z0}=const \qquad \cdot\cdot\cdot\cdot(2)$

(2) $r=l_{r2}$で　$\sigma_r\big|_{z=z}-\sigma_r\big|_{z=l_{z2}-z}=0,\ \tau_{rz}\big|_{z=z}-\tau_{rz}\big|_{z=l_{z2}-z}=0$

$$u_r\big|_{z=z}-u_r\big|_{z=l_{z2}-z}=2u_{r0}\ ,\ u_z\big|_{z=z}-u_z\big|_{z=l_{z2}-z}=u_{z0}$$

ここで，

$$u_{r0}=\frac{1}{l_{z2}}\int_0^{l_{z2}}u_r\big|_{r=l_{r2}}dz \qquad \cdot\cdot\cdot\cdot(3)$$

式(3)が成立することは，図２に示すように$r=l_{r2}$上の２点$Q(l_{r2},z)$と$Q'(l_{r2},l_{z2}-z)$は近接するユニットセルの等価な点であることから理解できる．さらに，もし，図１(b)に示すように$z=const$の面におけるσ_zの平均値$\sigma_{zav}=\sigma_0$であり，　$r=const$の面におけるσ_rの平均値$\sigma_{rav}=0$であるならば式(4)が成り立つ．ここで，σ_0は式(4)で定義される．

$$\sigma_0\times\pi l_{r2}{}^2=\int_0^{l_{r2}}\sigma_z\big|_{r=l_{r2}}2\pi r dr\ ,\ 0=\int_0^{l_{z2}}\sigma_r\big|_{r=l_{r2}}2\pi l_{r2}dz \qquad \cdot\cdot(4)$$

千鳥配列を図１(b)や図2のユニットセルで表現するときの境界条件は式(2)-(4)で表されるけれども，式(2),(3)に含まれるu_{r0}, u_{z0}は未知であるのでこれらを直接解くことはできない．

2.2　補助問題の境界条件

そこで，本解析では図３(a),(b)に示す２つの補助問題を考える．これら補助問題でも式(2),(3)は成立するものとする．但し，図３(a)では$u_{r0}=0$, $u_{z0}=C_1$（任意の定数)，図３(b)では，$u_{r0}=C_1$, $u_{z0}=0$である．このとき式(5)に従ってσ_1～σ_4を計算する．

$$\sigma_1\times\pi l_{r2}^2=\int_0^{l_{r2}}\sigma_z\big|_{z=l_{z2}}2\pi r dr \quad at \quad z=\pm l_{z2}$$

$$\sigma_2\times 2\pi l_{r2}l_{z2}=\int_{-l_{z2}}^{l_{z2}}\sigma_r\big|_{r=l_{r2}}2\pi l_{r2}dz \quad at \quad r=l_{r2}$$

$$\sigma_3\times\pi l_{r2}^2=\int_0^{l_{r2}}\sigma_z\big|_{z=l_{z2}}2\pi r dr \quad at \quad z=\pm l_{z2}$$

$$\sigma_4\times 2\pi l_{r2}l_{z2}=\int_{-l_{z2}}^{l_{z2}}\sigma_r\big|_{r=l_{r2}}2\pi l_{r2}dz \quad at \quad r=l_{r2} \qquad \cdot\cdot\cdot\cdot(5)$$

ここで，σ_1～σ_4は，式(5)で定義される補助問題[図３

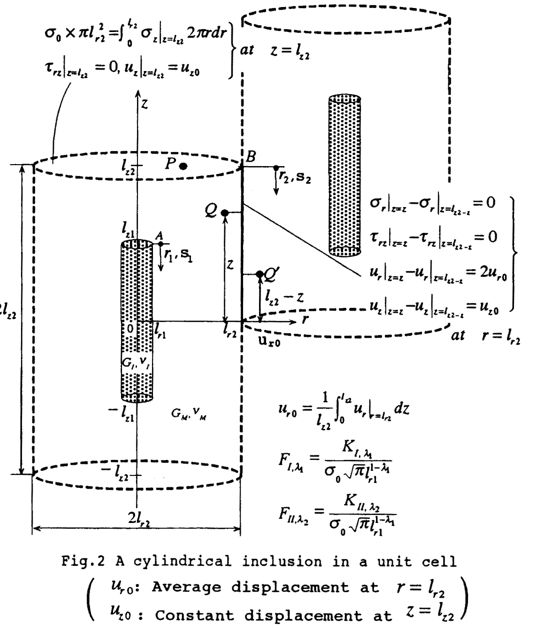


Fig.2 A cylindrical inclusion in a unit cell
(u_{r0}: Average displacement at $r=l_{r2}$
u_{z0} : Constant displacement at $z=l_{z2}$)

(a)，(b)]におけるz方向およびr方向垂直応力の平均値である．いま解析すべき，図1(b)の問題と2つの補助問題の無次元化応力拡大係数を式(6)で定義すると，これらには式(7)の関係がある（付録参照）．従って，補助問題を解析することによって図1(b)の問題を解析することができる．

$$F_{I,\lambda_1}=K_{I,\lambda_1}/(\sigma_0\sqrt{\pi}l_{r1}^{1-\lambda_1}),\quad F_{II,\lambda_2}=K_{II,\lambda_2}/(\sigma_0\sqrt{\pi}l_{r1}^{1-\lambda_2})$$
$$F^a_{I,\lambda_1}=K_{I,\lambda_1}/(\sigma_1\sqrt{\pi}l_{r1}^{1-\lambda_1}),\quad F^a_{II,\lambda_2}=K_{II,\lambda_2}/(\sigma_1\sqrt{\pi}l_{r1}^{1-\lambda_2})$$
$$F^b_{I,\lambda_1}=K_{I,\lambda_1}/(\sigma_3\sqrt{\pi}l_{r1}^{1-\lambda_1}),\quad F^b_{II,\lambda_2}=K_{II,\lambda_2}/(\sigma_3\sqrt{\pi}l_{r1}^{1-\lambda_2})\qquad\cdots\cdot(6)$$

$$F_{I,\lambda_1}=\frac{F^a_{I,\lambda_1}-(\sigma_2/\sigma_1)F^b_{I,\lambda_1}}{1-(\sigma_2/\sigma_1)(\sigma_3/\sigma_4)},\quad F_{II,\lambda_2}=\frac{F^a_{II,\lambda_2}-(\sigma_2/\sigma_1)F^b_{II,\lambda_2}}{1-(\sigma_2/\sigma_1)(\sigma_3/\sigma_4)}\qquad\cdots\cdot(7)$$

3．数値解析法の概略

図3(a)，(b)の2つの補助問題は，重ね合わせの原理に基づく体積力法の考え方により，無限体中の一点に集中力が働くときの任意の点の応力場の解と変位場の解を用いて解くことができる．このとき問題は，母材と同じ弾性定数をもつ無限体Mならびに介在物と同じ弾性定数をもつ無限体Iに分布させた体積力密度を未知関数とする特異積分方程式で表現される．

以下の式で，求めるべき未知関数は，無限体Mまたは無限体Iの円柱状介在物部分の仮想境界上に分布させる法線方向および接線方向の体積力密度(F_{nM1},F_{tM1})ならびに(F_{nI1},F_{tI1})であり，また，ユニットセル部分の仮想境界上に分布させる体積力密度(F_{nM2},F_{tM2})，(F_{nI2},F_{tI2})である．例えば，$h_{nn}^{F_{nM1}}(r_1,s_1)$は無限体$M$の円柱状孔となるべき仮想境界上の点$r_1$に法線方向の単位強さの集中力$F_{nM1}=1$が作用するとき，円柱状孔となるべき仮想境界上の任意の選点s_1に生じる法線方向の応力であり，r_1,s_1は介在物の角部Aからの距離，r_2,s_2はユニットセルの角部Bからの距離である．記号$\int_{l_1}$は円柱状孔または円柱状介在物となる境界上において体積力を積分することを意味し，$\int_{l_2}$はユニットセルの境界上において体積力を積分することを意味する．

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2}F_{nM1}(s_1)-\frac{1}{2}F_{nI1}(s_1)\\&+\int_{l_1}h_{nn}^{F_{nM1}}(r_1,s_1)F_{nM1}(r_1)dr_1+\int_{l_1}h_{nn}^{F_{tM1}}(r_1,s_1)F_{tM1}(r_1)dr_1\\&-\int_{l_1}h_{nn}^{F_{nI1}}(r_1,s_1)F_{nI1}(r_1)dr_1-\int_{l_1}h_{nn}^{F_{tI1}}(r_1,s_1)F_{tI1}(r_1)dr_1\\&+\int_{l_2}h_{nn}^{F_{nM2}}(r_2,s_1)F_{nM2}(r_2)dr_2+\int_{l_2}h_{nn}^{F_{tM2}}(r_2,s_1)F_{tM2}(r_2)dr_2\\&-\int_{l_2}h_{nn}^{F_{nI2}}(r_2,s_1)F_{nI2}(r_2)dr_2-\int_{l_2}h_{nn}^{F_{tI2}}(r_2,s_1)F_{tI2}(r_2)dr_2\\&=0\qquad\cdots\cdot(8)\end{aligned}$$

式(8)は介在物境界上の境界条件式$\sigma_{nM}-\sigma_{nI}=0$を表す．他の条件$\tau_{ntM}-\tau_{ntI}=0$，$u_{rM}-u_{rI}=0$，$u_{zM}-u_{zI}=0$およびユニットセル境界上の条件式(2)，(3)も同様に表現できる．ここで，(u_{rM},u_{zM})，(σ_{nM},τ_{ntM})は無限体Mの円柱状孔となる境界上に生じる変位と表面力であり，(u_{rI},u_{zI})，(σ_{nI},τ_{ntI})は無限体Iの円柱状介在物となるべき境界上に生じる変位と表面力である．本解析では，無限体Mと無限体Iにおいて介在物端部となるべき位置を一致させるため，無限体Iのユニットセル境界の位置にも体積力を分布させる，すなわち，その密度$F_{nM2}\sim F_{tI2}$は式(9)を満足する．

$$\begin{bmatrix}h_{ur}^{F_{nM2}} & h_{ur}^{F_{tM2}}\\ h_{uz}^{F_{nM2}} & h_{uz}^{F_{tM2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_{nM2}\\ F_{tM2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}h_{ur}^{F_{nI2}} & h_{ur}^{F_{tI2}}\\ h_{uz}^{F_{nI2}} & h_{uz}^{F_{tI2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_{nI2}\\ F_{tI2}\end{bmatrix}\qquad\cdots\cdot(9)$$

特異積分方程式の離散化数値解析のため，円柱状介在物およびユニットセルとなるべき境界をいくつかの基本区間に分けた例を図4に示す．円柱状介在物の端部A近傍の離散化数値解析を例として説明すると，ここでは，一般にモードIとモードIIの2種類の変形が生じる

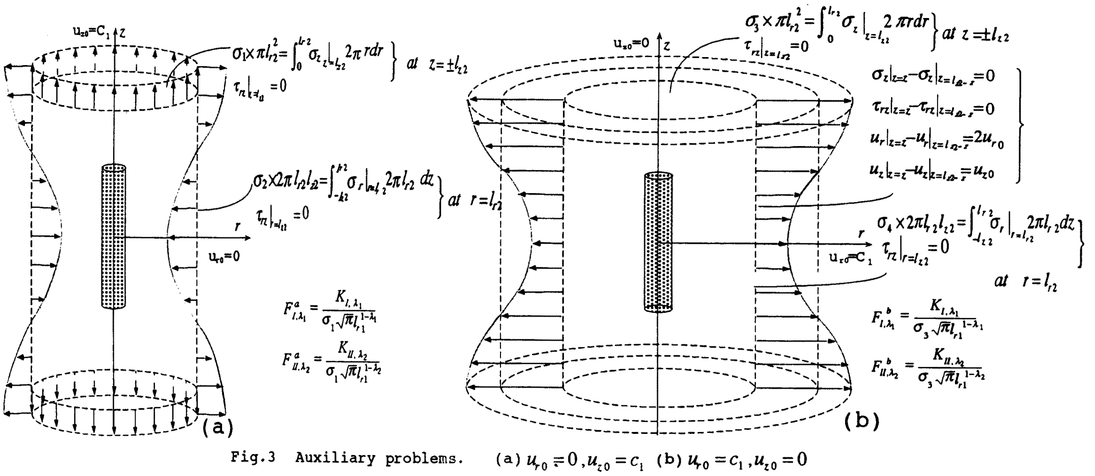


Fig.3 Auxiliary problems. (a) $u_{r0}=0, u_{z0}=c_1$ (b) $u_{r0}=c_1, u_{z0}=0$

ので，仮想境界上に分布させるべき体積力F_nとF_tに対して図１の$\theta=0$方向に関する対称形（モードI）と逆対称形（モードII）の２種類の分布形式を採用する．図５の端部Aの$A_2'-A-A_2$の範囲に分布させる体積力を以下に示すように基本密度関数（$r_A^{\lambda_1-1}$，$r_A^{\lambda_2-1}$：端部に対して対称および逆対称変形を表現する分布密度）と重み関数W_{nM1}^{I}～W_{nM1}^{II}等で近似する（式(10)）．

$$
\begin{aligned}
F_{nM1}(r_1) &= F_{nM1}^{\mathrm{I}}(r_1)+F_{nM1}^{\mathrm{II}}(r_1)=W_{nM1}^{\mathrm{I}}(r_1)r_1^{\lambda_1-1}+W_{nM1}^{\mathrm{II}}(r_1)r_1^{\lambda_2-1}\\
F_{tM1}(r_1) &= F_{tM1}^{\mathrm{I}}(r_1)+F_{tM1}^{\mathrm{II}}(r_1)=W_{tM1}^{\mathrm{I}}(r_1)r_1^{\lambda_1-1}+W_{tM1}^{\mathrm{II}}(r_1)r_1^{\lambda_2-1}\\
F_{nI1}(r_1) &= F_{nI1}^{\mathrm{I}}(r_1)+F_{nI1}^{\mathrm{II}}(r_1)=W_{nI1}^{\mathrm{I}}(r_1)r_1^{\lambda_1-1}+W_{nI1}^{\mathrm{II}}(r_1)r_1^{\lambda_2-1}\\
F_{tI1}(r_1) &= F_{tI1}^{\mathrm{I}}(r_1)+F_{tI1}^{\mathrm{II}}(r_1)=W_{tI1}^{\mathrm{I}}(r_1)r_1^{\lambda_1-1}+W_{tI1}^{\mathrm{II}}(r_1)r_1^{\lambda_2-1}
\end{aligned}
\quad\cdots\cdots(10)
$$

$$
\begin{aligned}
W_{nM1}^{\mathrm{I}}(r_1) &= \sum_{n=1}^{M} a_n r_1^{n-1}, \quad W_{tM1}^{\mathrm{I}}(r_1)=\sum_{n=1}^{M} b_n r_1^{n-1}\\
W_{nM1}^{\mathrm{II}}(r_1) &= \sum_{n=1}^{M} c_n r_1^{n-1}, \quad W_{tM1}^{\mathrm{II}}(r_1)=\sum_{n=1}^{M} d_n r_1^{n-1}\\
W_{nI1}^{\mathrm{I}}(r_1) &= \sum_{n=1}^{M} e_n r_1^{n-1}, \quad W_{tI1}^{\mathrm{I}}(r_1)=\sum_{n=1}^{M} f_n r_1^{n-1}\\
W_{nI1}^{\mathrm{II}}(r_1) &= \sum_{n=1}^{M} g_n r_1^{n-1}, \quad W_{tI1}^{\mathrm{II}}(r_1)=\sum_{n=1}^{M} h_n r_1^{n-1}
\end{aligned}
\quad\cdots\cdots(11)
$$

式(10)に含まれる基本密度関数$r_1^{\lambda_1-1}$，$r_1^{\lambda_2-1}$は端部A先端近傍について体積力密度の分布を精度良く表現するための関数で，それぞれ対称形（モードI）と逆対称形（モードII）の変形を表現する．本解析で用いる式(10)(11)の表現は，特異応力場に対応する変形様式以外の変形を含まない．従って，式(9)で表されるように無限体Iにも端部の近傍の変位を一致させるように体積力を分布させる．以上のような離散化手法により，境界上に適当に選んだ点での境界条件から式(11)のa_n～h_n等の係数を決定すれば，特異積分方程式の解が得られる．そして，介在物の端部Aに関して定義された応力拡大係数K_{I,λ_1}，$K_{\mathrm{II},\lambda_2}$は端部A先端での重み関数の$W_n^{\mathrm{I}}(0)$，$W_n^{\mathrm{II}}(0)$，$W_t^{\mathrm{I}}(0)$，$W_t^{\mathrm{II}}(0)$から求められる．

Table 1 Convergence of $F_{I,\lambda 1}$and $F_{II,\lambda 2}$

($l_{z1}/l_{r1}=30$, $l_{z2}/l_{r1}=31$, $l_{r2}/l_{r1}=2.2$)

M_1	$G_I/G_M=60$		$G_I/G_M=10^2$	
	$F_{\mathrm{I},\lambda 1}$	$F_{\mathrm{II},\lambda 2}$	$F_{\mathrm{I},\lambda 1}$	$F_{\mathrm{II},\lambda 2}$
3	0.4398	0.5354	0.4588	0.4872
4	0.4407	0.5368	0.4613	0.4921
5	0.4416	0.5375	0.4628	0.4925
6	0.4413	0.5371	0.4628	0.4924

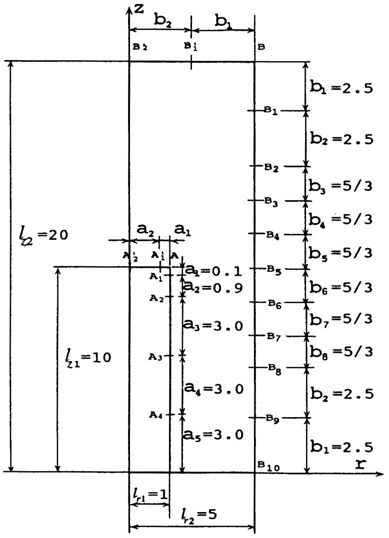


Fig.4 Boundary division($l_{z2}/l_{r1}=10$, $l_{r2}/l_{r1}=5$, $l_{z2}/l_{z1}=2$).

４．解析結果および考察

4.1 解の収束性　図２に示すような３次元配列をなす円柱状介在物の端部の干渉問題において，介在物とユニットセルの寸法や剛性比G_I/G_Mを変えて繊維端部の応力拡大係数K_{I,λ_1}，$K_{\mathrm{II},\lambda_2}$の解析を行った．なお，本論文では簡単のため$\nu_I=\nu_M=0.3$とした．表１は，$F_{I,\lambda 1}$，$F_{II,\lambda 2}$の値(異なる重み関数に対応する値の平均値)の収束の例を示す．計算に用いた境界の基本区間の例

Table 2 Mechanical properties of carbon fiber-reinforced plastics

	Polycarbonate / Carbon fiber	Polyamid / Carbon fiber	Polyphenylene Sulfide / Carbon fiber
Young's modulus of matrix (MPa)	2000	2800	3800
Density of matrix (g/cm^3)	1.19～1.23	1.14～1.16	1.35
Young's modulus of fiber (MPa)	235000	235000	235000
Density of fiber (g/cm^3)	1.80	1.80	1.80
Aspect ratio of fiber (average)	30	30	30
Elastic ratio G_I/G_M	118	84	61
Weight percent of fiber (%)	30	30	30
Volume percent of fiber (%)	22.08～22.68	21.37～21.65	24.30

Table 3 Mechanical properties of glass fiber-reinforced plastics

	Polypropylene / Glass fiber	Polyethylene / Glass fiber	Polysthylene / Glass fiber
Young's modulus of matrix (MPa)	900～1300	950～1400	3100～3200
Density of matrix (g/cm^3)	0.89～0.91	0.94～0.96	1.04～1.05
Young's modulus of fiber (MPa)	76000	76000	76000
Density of fiber (g/cm^3)	2.51	2.51	2.51
Aspect ratio of fiber (average)	30	30	30
Elastic ratio G_I/G_M	58～84	54～80	24～25
Weight percent of fiber (%)	40	40	40
Volume percent of fiber (%)	19.09～19.44	19.96～20.29	21.62～21.79

を図5に示す（$l_{z1}/l_{r1}=10$, $l_{z2}/l_{z1}=2$, $l_{r2}/l_{r1}=5$）．表1以外でも検討の結果，境界を図4に示すような基本区間に分割し前節の解析法を適用することによって，各基本区間の選点数 M_1 = 4~6 での $F_{I,\lambda 1}$, $F_{II,\lambda 2}$ の値が有効数字3～4桁程度まで収束しており，良好な結果が得られることが確認された．以下では，このようにして求めた $F_{I,\lambda 1}$, $F_{II,\lambda 2}$ を介在物とユニットセルの寸法や剛性比 G_I/G_M を系統的に変化させて示す．

4.2 繊維の体積含有率を変化させたときの応力拡大係数 表2，3に短繊維強化プラスチックスの母材と繊維の機械的性質を示す．これらの数値を考慮してまず母材と繊維の剛性比 $G_I/G_M=60$，繊維のアスペクト比 $l_{z1}/l_{r1}=30$ に固定し，繊維の体積含有率 V_I と母材のアスペクト比 l_{z2}/l_{r2} を変化させて繊維端部の応力拡大係数の解析を行った．これらの条件は表2における炭素繊維とポリフェニレンサルファイドを組み合わせた繊維強化プラスチックの場合等に相当する．なお，解析は千鳥配列(図1(b))と周期配列(図1(a))のそれぞれで行った．表4はそれぞれの場合での円柱状介在物の端部Aの $F_{I,\lambda 1}$, $F_{II,\lambda 2}$ の値を示す．

表4において繊維の体積含有率 $V_I\to 0\%$ は母材の寸法が介在物に比べ十分に大きいとき，即ち，$l_{r2}/l_{r1}\to\infty$, $l_{z2}/l_{z1}\to\infty$ の場合に相当する．また，case1，3はそれぞれ現有する計算機で，精度よく計算できる幾何学的限界点まで母材のアスペクト比 l_{z2}/l_{r2} を小さくまたは大きくした点での結果であり，case2は後述する千鳥配列のグラフにおける極大値の点での結果を示したものである．図5は千鳥配列における表4の値を図示したものであり，図6は周期配列における表4の値を図示したものである．

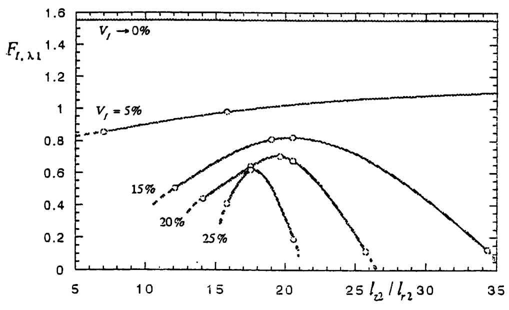
図5，6より，千鳥配列と周期配列の両者において繊維の体積含有率の増加に伴って $F_{I,\lambda 1}$, $F_{II,\lambda 2}$ がおおまかな傾向としては減少しているといえる．また，繊維の体積含有率の増加に伴って，$F_{I,\lambda 1}$, $F_{II,\lambda 2}$ の母材のアスペクト比 l_{z2}/l_{r2} に対する変化が大きくなる．また，$F_{I,\lambda 1}$, $F_{II,\lambda 2}$ 共に周期配列の場合は母材のアスペクト比 l_{z2}/l_{r2} が増加するにつれて，その値がなだらかに減少する，即ち横方向に分布する繊維が接近することが安全側となるの

Table 4(a) $F_{I,\lambda 1}$ for zigzag array and periodic array
($G_1/G_M=60$, $l_{z1}/l_{r1}=30$)

Volume percent of fiber (%)	case1			case2			case3		
	Zig-zag array	Periodic array	l_{z2}/l_{r2}	Zig-zag array	Periodic array	l_{z2}/l_{r2}	Zig-zag array	Periodic array	l_{z2}/l_{r2}
25	0.413	0.381	15.78	0.626	0.388	17.71	0.118	0.362	20.58
20	0.448	0.445	14.09	0.708	0.428	19.61	0.116	0.398	25.72
15	0.511	0.499	12.18	0.825	0.455	20.37	0.129	0.342	34.30
5	0.861	0.811	7.02	1.127	0.778	48.13	0.568	0.718	103.11
→0	1.562	1.546	-	1.559	1.558	-	1.558	1.562	-

Table 4(b) $F_{II,\lambda 2}$ for zigzag array and periodic array
($G_1/G_M=60$, $l_{z1}/l_{r1}=30$)

Volume percent of fiber (%)	case1			case2			case3		
	Zig-zag array	Periodic array	l_{z2}/l_{r2}	Zig-zag array	Periodic array	l_{z2}/l_{r2}	Zig-zag array	Periodic array	l_{z2}/l_{r2}
25	0.456	0.395	15.78	0.792	0.384	17.81	0.315	0.368	20.58
20	0.541	0.508	14.09	0.975	0.481	19.66	0.378	0.436	25.72
15	0.655	0.589	12.18	1.048	0.560	21.27	0.403	0.433	34.30
5	1.253	1.198	7.02	1.498	1.178	46.32	1.055	1.138	103.11
→0	2.162	2.158	-	2.158	2.161	-	2.157	2.161	-



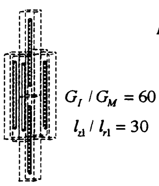


Fig.5(a) $F_{I,\lambda 1}$ for zigzag array

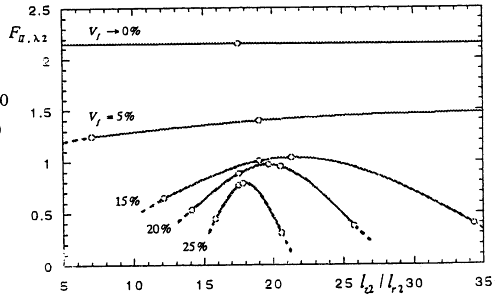
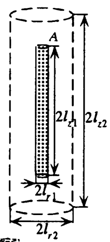
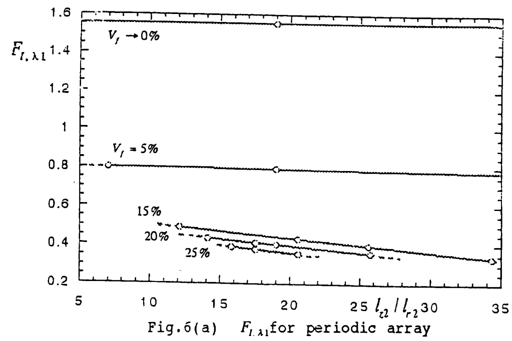


Fig.5(b) $F_{II,\lambda 2}$ for zigzag array





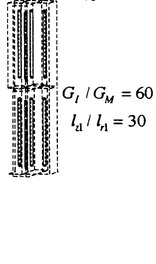


Fig.6(a) $F_{I,\lambda 1}$ for periodic array

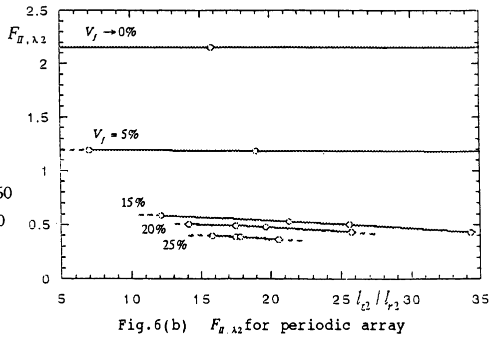


Fig.6(b) $F_{II,\lambda 2}$ for periodic array

に対して，千鳥配列の場合は極大値が発生していることが分かる．このことは２本の強化繊維（長方形介在物）の干渉効果を示す図７[14]より説明できる．

図７に示すように繊維が真横に配置されている場合（$l=10$）は，その接近に伴って$F_{I,\lambda1}$,$F_{II,\lambda2}$を減少させる．

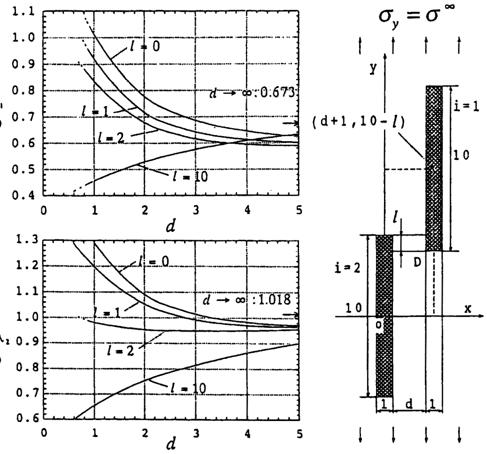


Fig.7 Results for two rectangular inclusions under plane strain

(a) $F_{I,\lambda1}$ at D vs.d relation (b) $F_{II,\lambda2}$ at D vs.d relation
(G_I/G_M=100, $\nu_I=\nu_M=0.3$)

しかし繊維が斜めに配置された状態（$l=0,1,2$）で接近する場合には$F_{I,\lambda1}$,$F_{II,\lambda2}$は増加する．千鳥配列では，１本の強化繊維に注目すると，他の繊維が斜めと真横の両方に存在するので，母材のアスペクト比l_{z2}/l_{r2}が増加するとき，即ち他の繊維の接近に伴って２つの効果が生じることになる．よって，千鳥配列では，繊維が斜めに接近して配置するある特定の位置で最も危険となり，$F_{I,\lambda1}$,$F_{II,\lambda2}$共に最大値をとると考えられる．この傾向は繊維の体積含有率が変化しても認められる．更に，繊維の体積含有率が減少するにつれてその極大値は大きくなり，そのときの母材のアスペクト比も大きくなっていく．

4.3 剛性比の干渉効果への影響について

次に繊維の体積含有率V_I＝20％，繊維のアスペクト比l_{z1}/l_{r1}＝30にそれぞれ固定して，母材と繊維の剛性比G_I/G_Mと母材のアスペクト比 l_{z2}/l_{r2}を変化させて4.2と同様な解析を行った．ここで用いた繊維の体積含有率20%は，表2, 3に示すように多くの繊維強化プラスチックの繊維の体積含有率に相当している．表５はそれぞれの場合での円柱状介在物の端部Ａの$F_{I,\lambda1}$,$F_{II,\lambda2}$の値を示す．図8は千鳥配列における表5の値を図示したものであり，図9は周期配列における表5の値を図示

Table 5(a) $F_{I,\lambda1}$ for zigzag array and periodic array (Volume percent of fiber =20% , $l_{z1}/l_{r1}=30$)

G_I/G_M	case1			case2			case3			$V_I\to0\%$
	Zig-zag array	Periodic array	l_{z2}/l_{r2}	Zig-zag array	Periodic array	l_{z2}/l_{r2}	Zig-zag array	Periodic array	l_{z2}/l_{r2}	
10	0.368	0.363	14.09	0.609	0.337	18.43	0.105	0.270	25.72	0.617
60	0.441	0.435	14.09	0.693	0.404	19.31	0.119	0.361	25.72	1.556
100	0.463	0.440	14.09	0.740	0.382	19.58	0.111	0.305	25.72	1.943

Table 5(b) $F_{II,\lambda2}$ for zigzag array and periodic array (Volume percent of fiber =20% , $l_{z1}/l_{r1}=30$)

G_I/G_M	case1			case2			case3			$V_I\to0\%$
	Zig-zag array	Periodic array	l_{z2}/l_{r2}	Zig-zag array	Periodic array	l_{z2}/l_{r2}	Zig-zag array	Periodic array	l_{z2}/l_{r2}	
10	0.582	0.567	14.09	1.038	0.507	20.50	0.402	0.453	25.72	1.124
60	0.537	0.503	14.09	0.967	0.470	19.81	0.435	0.435	25.72	2.156
100	0.492	0.476	14.09	0.850	0.429	18.77	0.356	0.356	25.72	2.673

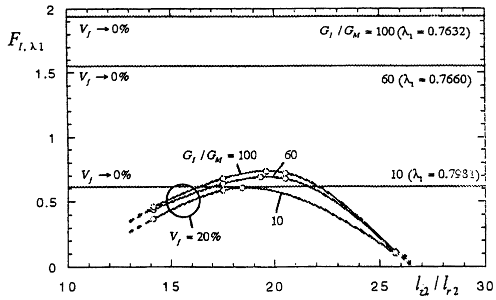
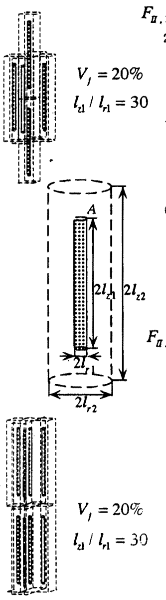


Fig.8(a) $F_{I,\lambda1}$ for zigzag array



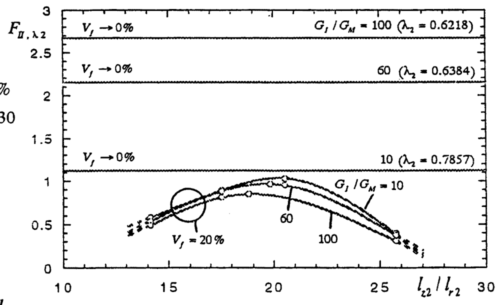


Fig.8(b) $F_{II,\lambda2}$ for zigzag array

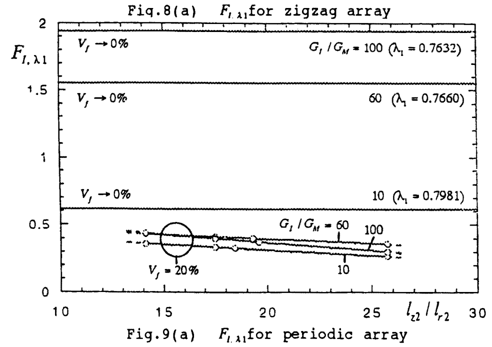


Fig.9(a) $F_{I,\lambda1}$ for periodic array

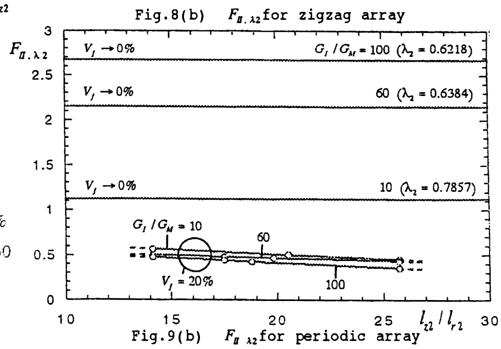


Fig.9(b) $F_{II,\lambda2}$ for periodic array

したものである．これらの図中には応力特異性指数（式1のλ_1，λ_2）の値も示している．図8，9より同じ幾何学的条件でも，$G_I/G_M=10\to100$と剛性比が増加するに伴って干渉効果が大となり，繊維が単独に存在する場合（図8,9の$V_f\to0$）と比べて$F_{I,\lambda1},F_{II,\lambda2}$の減少の割合が大となることが分かる．例えば$G_I/G_M=100$では，周期配列と千鳥配列の両者を含めて，$F_{I,\lambda1},F_{II,\lambda2}$の値が繊維が単独に存在する場合の値$F_{I,\lambda1}\big|_{V_f\to0}$，$F_{II,\lambda2}\big|_{V_f\to0}$と比べて$F_{I,\lambda1}/F_{I,\lambda1}\big|_{V_f\to0}=0.06\sim0.38$，$F_{II,\lambda2}/F_{II,\lambda2}\big|_{V_f\to0}=0.13\sim0.32$であるのに対して$G_I/G_M=10$では$F_{I,\lambda1}/F_{I,\lambda1}\big|_{V_f\to0}=0.17\sim0.99$，$F_{II,\lambda2}/F_{II,\lambda2}\big|_{V_f\to0}=0.36\sim0.92$であり，繊維が単独で存在する場合とほとんど変わらない場合もある．

4.4 繊維の最適な配列について　本論文では図1(a)，(b)に示す周期配列および千鳥配列の問題を取り扱った．これらのモデルより繊維の体積率一定のもとで理想的な繊維の配列を考慮すると，図5，6と図8，9より隣接する繊維が極端に接する場合を除き，ユニットセルのアスペクト比l_{z2}/l_{r2}を大とすれば，繊維端部の特異応力を小さくできることがわかる．

5．結　言

(1) 2つの補助問題の重ね合わせより，図1(a)(b)に示す周期配列と千鳥配列における強化繊維端部の特異性の強さを支配する一般化応力拡大係数を解析する方法を示した．問題をユニットセル領域に置き換えて，その境界条件を体積力法の特異積分方程式によって表現し，未知関数を基本密度関数と近似式で近似して求めた．実際の繊維強化プラスチックスのデータ（表2，3）を基に得られた結果を図表に示した．

(2) 周期配列（図1(a)）において繊維の体積含有率V_fが増加すると$F_{I,\lambda1},F_{II,\lambda2}$ともに減少する（図6，9）．$V_f$＝一定の場合，母材のアスペクト比$l_{z2}/l_{r2}$が増加するにつれて，$F_{I,\lambda1},F_{II,\lambda2}$の値が緩やかに減少する．即ち横方向に分布する繊維が接近することが安全側となる．またその減少率は繊維の体積含有率が大きいほど大きい．

(3) 千鳥配列（図1(b)）において繊維の体積含有率V_fが増加すると$F_{I,\lambda1},F_{II,\lambda2}$ともに減少する．但し，その減少率は母材のアスペクト比l_{z2}/l_{r2}に依存する（図5，8）．即ちV_f＝一定の場合，母材のアスペクト比l_{z2}/l_{r2}の変化に対して隣り合う繊維が斜めに接近して配置するある特定の位置で最も危険となり，$F_{I,\lambda1},F_{II,\lambda2}$共に最大値をとる．また，繊維の体積含有率が大きいほど$F_{I,\lambda1},F_{II,\lambda2}$の変化は大きく，曲線の傾きも大きくなる．

(4) 強化繊維が千鳥配列や周期配列をなす場合の$F_{I,\lambda1},F_{II,\lambda2}$を強化繊維が単独で存在する場合と比べると，同じ幾何学的条件でも剛性比の増加に伴って干渉効果は大となり，単独で存在する場合よりも$F_{I,\lambda1}$，$F_{II,\lambda2}$の減少の割合が大となる．

(5) 繊維の体積率一定のもとで理想的な繊維の配列を考慮すると，緒言(2)，(3)より隣接する繊維が極端に接する場合を除き，ユニットセルのアスペクト比l_{z2}/l_{r2}を大とすれば，繊維端部の特異応力を小さくできることが明らかとなった．

表2，3のデータは出光石油化学・後藤浩文博士の協力を得た．また，結果をまとめるに際し大学院生長尾優樹君の助力を得た，深くお礼申し上げます．

付　録

式（7）の導出について　与えられた問題[図1および付図1 (a)]は，ユニットセルに作用する応力の平均値が$\sigma_{zav}=\sigma_0,\sigma_{rav}=0$でそのときの無次元化応力拡大係数は，$F_{I,\lambda_1}$，$F_{II,\lambda_2}$である．同様に付図1 (b) に示すように$\sigma_{zav}=0,\sigma_{rav}=\sigma_0'$の状態を考える．そのときの無次元化応力拡大係数は，F'_{I,λ_1}，F'_{II,λ_2}である．これらと付図2に示す各々の補助問題の平均応力σ_1，σ_2，σ_3，σ_4に次式のような関係が成立する．

$$F^a_{I,\lambda_1}=F_{I,\lambda_1}+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}F'_{I,\lambda_1},\quad F^b_{I,\lambda_1}=F_{I,\lambda_1}+\frac{\sigma_4}{\sigma_3}F'_{I,\lambda_1}\quad\cdots(A1)$$

$$F^a_{II,\lambda_2}=F_{II,\lambda_2}+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}F'_{II,\lambda_2},\quad F^b_{II,\lambda_2}=F_{II,\lambda_2}+\frac{\sigma_4}{\sigma_3}F'_{II,\lambda_2}\cdot\quad\cdots(A2)$$

式(A1)，(A2)よりF'_{I,λ_1}，F'_{II,λ_2}を導出すると式(A3)を得る．

$$F_{I,\lambda_1}=\frac{F^a_{I,\lambda_1}-(\sigma_2/\sigma_1)F^b_{I,\lambda_1}}{1-(\sigma_2/\sigma_1)(\sigma_3/\sigma_4)},\quad F_{II,\lambda_2}=\frac{F^a_{II,\lambda_2}-(\sigma_2/\sigma_1)F^b_{II,\lambda_2}}{1-(\sigma_2/\sigma_1)(\sigma_3/\sigma_4)}\quad\cdots(A3)$$

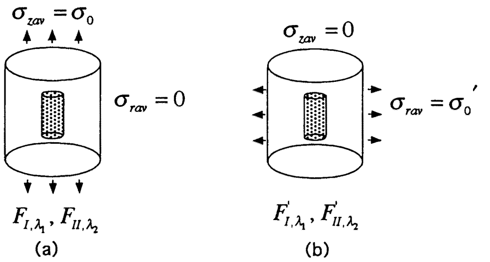


Fig.1 Problems.

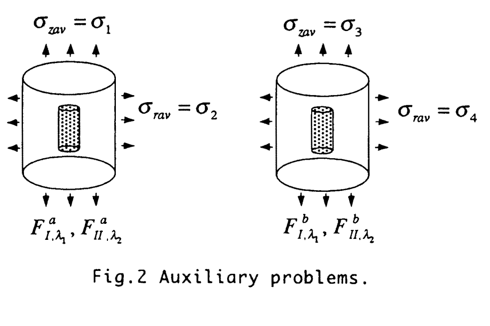


Fig.2 Auxiliary problems.

文　献

(1)西谷弘信・野口博司・後藤浩文・藤本徳樹・山口照敬・村上礼三, 短炭素繊維強化熱可塑性プラスチックの疲労過程, 機論, 56-525, A (1990), 1044-1050.

(2)野口博司・西谷弘信・金允海・山口照敬, 短炭素繊維強化ポリアド6.6のねじり疲労過程, 機論, 58-553, A(1992), 1555-1560.

(3)笠野英秋・松本浩之・ 中原一郎, 有限円柱状剛体介在物を含む無限体の引張り, 機論, 47-413, A(1981), 18-26.

(4)長谷川久夫・吉家幸一, 円柱状弾性介在物を有する弾性体の引張り, 機論, 60-575, A(1994), 1585-1590.

(5)Takao, Y., Taya M. and Chou, T, W., Stress Field Due to a Cylindrical Inclusion With Constant Axial Eigenstrein in an Infinite Elastic Body, *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*, 48(1981), 853-858.

(6)Hasegawa, H., Lee, V. -G. and Mura, T., The Stress Fields Caused by a Circular Cylindrical Inclusion, *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*, 59(1992), 107-114.

(7)Wu, L. and Du, S., The Elastic Field Caused by a Circular Cylindrical Inclusion Part I, *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*, 62 (1995), 579-584.

(8)Wu, L. and Du, S., The Elastic Field Caused by a Circular Cylindrical Inclusion Part II, *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*, 62 (1995), 585-589.

(9)野田尚昭・王　清・諸富貴光, 円柱状介在物端部の特異応力場の強さ解析, 機論, 63-612, A(1997), 1701-1706.

(10)野田尚昭・現海孝雄・熊谷雄一郎, 円柱状介在物端部の非軸対称一軸引張りにおける特異応力場の強さ解析, 機論, 66-644, A(2000), 735-740.

(11)野田尚昭・高瀬　康・ 石井直二, 3次元配列をなす強化繊維端部の一般化応力拡大係数, 機論, 69-677, A(2003), 154-159.

(12)陳玳珩・西谷弘信, 短繊維端における特異応力場の強さ解析 (第一報, 解析方法), 機論, 58-554, A(1992), 1834-1838.

(13)Bogy, D.B. and Wang, K.C., Stress Singularities at Interface Corners in Bonded Dissimilar Isotropic Elastic Materials, Int. J. Solids Structures., 7-8 (1971), 993-1008.

(14)Noda, N.A., Takase, Y. and Chen, M.C.,Generalized stress intensity factors in the interaction between two fibers in matrix, Int. J. Fract., 103, (2000), 19-39.